

Planificação Aula 13 (presencial)

TP4D-1: 5ª feira, 29/04, 14h; TP4D-2: 5ª feira, 29/04, 16h; TP4D-3: 6ª feira, 30/04, 11h; TP4D-4: 4ª feira, 28/04, 10h30; TP4D-5: 6ª feira, 30/04, 14h

- Notas: 1) Passar para o caderno ou imprimir esta planificação e estudá-la antes da aula.
 2) A aula será essencialmente dedicada à resolução dos exercícios apresentados.
 3) Depois da aula resolver os TPCs indicados no final desta planificação.

Slides 32 a 34

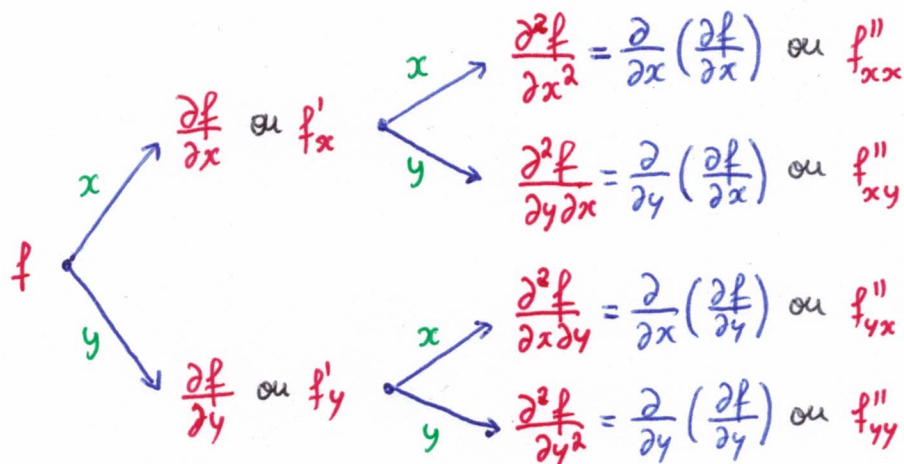
 Derivadas parciais de ordem superior

As derivadas parciais de 2ª ordem de uma função f obtêm-se derivando parcialmente as funções derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Notações:

1ª ordem

2ª ordem



Definição: Sejam $D \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}_0$. Diz-se que f é de classe C^k em D se f admite derivadas parciais contínuas até à ordem k em todos os pontos de D .

Teorema de Schwarz (em \mathbb{R}^2)

Seja $f(x,y)$ uma função de classe C^2 num conjunto aberto $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Então, $\forall (x,y) \in D$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$$

Nota: Ver no slide 34 a versão do Teorema de Schwarz para \mathbb{R}^m

Exercício 1: Calcular as derivadas parciais de 2ª ordem de

$$f(x,y) = x^3y + 5xy^2 + \sin(y^3).$$

Exercício 2: Mostrar que $f(x,y) = e^{-2y} \cos(2x)$ satisfaz a eq. de Laplace $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

Recordar: • Norma do vetor $\vec{u} = (u_1, u_2) \rightarrow \|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$
 (em \mathbb{R}^2) • Vetor unitário \rightarrow tem norma igual a 1

Slides 35 a 39 Derivadas direcionais

Definição: Sejam $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $p = (a, b) \in \text{int}(D)$ e $\vec{u} = (u_1, u_2)$ um vetor unitário
 A derivada direcional de f no ponto p na direção de \vec{u} é $\hookrightarrow \|\vec{u}\| = 1$

$$D_{\vec{u}} f(p) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p + h\vec{u}) - f(p)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + hu_1, b + hu_2) - f(a, b)}{h}$$

(se o limite existir)

Nota: Se $\|\vec{u}\| \neq 1$, a derivada direcional obtém-se substituindo na fórmula anterior o vetor \vec{u} pelo vetor unitário $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$

Observações: • A fórmula anterior generaliza-se para \mathbb{R}^n (slide 36)
 • Ver no slide 36 a interpretação geométrica (e a oplet).

Exercício 3: Calcule a derivada direcional de $f(x, y) = x^2 + y$ na direção do vetor $\vec{u} = (1, -1)$ no ponto $(2, 3)$.

Nota: Veremos mais à frente nesta aula como e quando se podem calcular as derivadas direcionais de forma mais simples

Recordar: • $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em $x = a$ se $f'(a)$ existe e é finita
 (em \mathbb{R}) • f é diferenciável em $x = a \Rightarrow f$ é contínua em $x = a$

A generalização do conceito de diferenciabilidade para funções de várias variáveis não é imediato pois:

- As derivadas parciais de uma função num ponto podem existir, ser finitas e iguais, mas mesmo assim a função ser descontínua nesse ponto. (ver exemplo slide 35)
- Existem funções que admitem derivadas segundo todas as direções num dado ponto e, ainda assim, são descontínuas nesse ponto. (ver exemplo slide 39)

Slides 40 a 46 Diferenciabilidade

Nota: Nesta planificação só se estuda a diferenciabilidade em \mathbb{R}^2 (ver nos slides para \mathbb{R}^m)

Definição: Sejam $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $(a,b) \in \text{int}(D)$. Diz-se que f é diferenciável em (a,b) se as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ existem e

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(a+h, b+k) - f(a,b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \cdot h - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \cdot k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

Observação: Esta definição está escrita de forma diferente no slide 42, mas elas são equivalentes usando as mudanças de variável $x = a+h$ e $y = b+k$.

Ver nos slides 40 e 41 a motivação geométrica para a definição de diferenciabilidade.

Exercício 4: Verifique se as seguintes funções são diferenciáveis no ponto indicado:

a) $f(x,y) = x^2 + y^2$ em $(3,1)$

b) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ em $(0,0)$

c) $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$ em $(0,0)$

Teorema: Se $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em $(a,b) \in \text{int}(D)$, então f é contínua em (a,b) (slide 44)

Consequência: Se f não é contínua em (a,b) então f não é diferenciável em (a,b) .

Exercício 5: Mostre que $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ não é diferenciável em $(0,0)$.

Teorema: Seja $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $p = (a,b) \in \text{int}(D)$.

- (slide 45)
- Se f admite derivadas parciais numa bola de centro p e se essas derivadas são contínuas em p , então f é diferenciável em p .
 - Se D é aberto e as derivadas parciais de f são contínuas em D , então f é diferenciável em todos os pontos de D .

Exercício 6: Resolva de novo o exercício 4a) usando agora o teorema anterior.

Recordar: • Produto interno de dois vetores

↳ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \alpha$, onde α é o ângulo formado entre \vec{u} e \vec{v} .

Se $\vec{u} = (u_1, u_2)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2)$ então $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$

• Vetor gradiente da função $f \rightsquigarrow \nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)$

Slides 45 a 47

Derivadas direcionais

(outra forma mais simples para as calcular)

↳ pode-se usar quando f for diferenciável

Nota: Para provar que f é diferenciável devem, em primeiro lugar, tentar aplicar o teorema do slide 45 dado na página anterior.

Teorema: Se $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ for diferenciável no ponto $p = (a, b) \in \text{int}(D)$, então a derivada direcional de f no ponto p na direção do vetor unitário $\vec{u} = (u_1, u_2)$ é

$$\hookrightarrow \|\vec{u}\| = 1$$

$$\begin{aligned} D_{\vec{u}} f(p) &= \nabla f(p) \cdot \vec{u} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right) \cdot (u_1, u_2) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \cdot u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \cdot u_2 \end{aligned}$$

Nota: Se $\|\vec{u}\| \neq 1$, a derivada direcional obtém-se substituindo na fórmula anterior o vetor \vec{u} pelo vetor unitário $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$

Observação: A direção de maior crescimento de uma função f no ponto (a, b) é $\vec{u} = \nabla f(a, b)$. Neste caso, $D_{\vec{u}} f(a, b) = \|\nabla f(a, b)\|$. (Ver detalhes no slide 47)

Exercício 7: Seja f a função de domínio \mathbb{R}^2 dada por $f(x, y) = e^x \cos y + \frac{y^2}{2} + 1$

a) Mostre que f é diferenciável em \mathbb{R}^2

b) Calcule a derivada direcional de f no ponto $(1, 0)$ segundo a direção do vetor $(1, 2)$.

c) Determine o valor máximo da derivada direcional de f no ponto $(0, \pi)$

Recordar: Seja $y = f(x)$ (função de uma variável)

A equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto (x_0, y_0) é

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Slides 41, 42, 48, 49 **Plano tangente e reta normal**

1.º caso: Seja $z = f(x, y)$ (função de 2 variáveis)

- Equações do **plano tangente** ao gráfico de f no ponto (x_0, y_0, z_0)

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

- Equação vetorial da **reta normal** ao gráfico de f no ponto (x_0, y_0, z_0)

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0); \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0); -1 \right), \lambda \in \mathbb{R}$$

Nota: O vetor $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0); \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0); -1 \right)$ é normal ao gráfico de f no ponto (x_0, y_0, z_0)

2.º caso: Seja $F(x, y, z) = k$ uma superfície de nível que passa no ponto (x_0, y_0, z_0) (F é uma função de 3 variáveis)

Nota: O vetor gradiente $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ é normal ao plano tangente à superfície de nível $F(x, y, z) = k$. (Assumindo que $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$)

- Equação do **plano tangente** à superfície de nível $F(x, y, z) = k$ no ponto (x_0, y_0, z_0)

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0 \rightarrow \text{Fórmulas equivalentes}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \cdot (y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \cdot (z - z_0) = 0$$

- Equação vetorial da **reta normal** à superfície de nível $F(x, y, z) = k$ no ponto (x_0, y_0, z_0)

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda \cdot \nabla F(x_0, y_0, z_0), \lambda \in \mathbb{R}$$

Nota: O 1.º caso inclui-se no 2.º caso, pois:

$$z = f(x, y) \Leftrightarrow \underbrace{f(x, y) - z}_{F(x, y, z)} = 0 \quad \text{e} \quad \nabla F(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y); \frac{\partial f}{\partial y}(x, y); -1 \right)$$

Exercício 8: Considere a função $F(x, y, z) = 2xz^4 + x^2y$.
Determine a equação do plano tangente e da reta normal
à superfície de nível 3 de F no ponto $(-1; 2; 1)$.

Slides 50 a 53

→ Auto-estudo facultativo (esta matéria não será avaliada)

TPCs : Folha prática 3: 11, 12, 13, 14, 15, 16

1.º Teste, 10/04/2019 → Ex. 5

Exame Final, 19/06/2019 → Ex. 3a)

2.º Teste, 13/06/2018 → Ex. 1a), 1b)

1.º Teste, 05/04/2017 → Ex. 1b), 1c)

Exame de Recurso, 10/07/2017 → Ex. 1a)

Aula 13

1) $f(x, y) = x^3y + 5xy^2 + \sin(y^3)$

1º ordem

$$\frac{df}{dx} = (x^3y + 5xy^2 + \sin(y^3))'_x = 3x^2y + 5y^2$$

$$\frac{df}{dy} = (x^3y + 5xy^2 + \sin(y^3))'_y = x^3 + 10xy + 3y^2 \cos(y^3)$$

2ª ordem

$$\frac{d^2f}{dx^2} = (3x^2y + 5y^2)'_x = 6xy$$

Derivada Mista $\left\{ \frac{df}{dy dx} = (3x^2y + 5y^2)'_y = 3x^2 + 10y \right.$

Derivar em ordem a y o que se derivou em ordem a x

Derivada Mista $\left\{ \frac{df}{dx dy} = (x^3 + 10xy + 3y^2 \cos(y^3))'_x = 3x^2 + 10y \right.$

Derivar em ordem a x o que se derivou em ordem a y

iguais → Teo. Schwarz

$$\begin{aligned} \frac{d^2f}{dy^2} &= (x^3 + 10xy + 3y^2 \cos(y^3))'_y = \\ &= 10x + 6y \cos(y^3) + 3y^2 \times (-3y^2) \sin(y^3) \\ &= 10x + 6y \cos(y^3) - 9y^4 \sin(y^3) \end{aligned}$$

2) T.P.C

3) $f(x, y) = x^2 + y$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \neq 1$$

$$\vec{u} = (1, -1)$$

$$p = (2, 3)$$

$$D_{\vec{u}} f(2, 3) = ?$$

$$\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{(1, -1)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

C. aux

$$f(2, 3) = 2^2 + 3 = 7$$

$$\begin{aligned} f\left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}h, 3 - \frac{1}{\sqrt{2}}h\right) &= \left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}h\right)^2 + 3 - \frac{1}{\sqrt{2}}h \\ &= 4 + \frac{4}{\sqrt{2}}h + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}h\right)^2 + 3 - \frac{1}{\sqrt{2}}h \\ &= 7 + \frac{3}{\sqrt{2}}h + \frac{1}{2}h^2 \end{aligned}$$

$$D_{\vec{u}} f(2, 3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(2 + h \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}, 3 + h \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) - f(2, 3)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{7 + \frac{3}{\sqrt{2}}h + \frac{1}{2}h^2 - 7}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{h} \left(\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}h\right)}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}h\right) = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Ex. 4) Diferenciabilidade

a) $f(x,y) = x^2 + y^2$ em $(3,1)$

1º Passo: Verificar se $\frac{df}{dx}$ e $\frac{df}{dy}$ existem no ponto dado

$\frac{df}{dx} = 2x \rightarrow \frac{df}{dx}(3,1) = 2 \times 3 = 6$ ✓

$\frac{df}{dy} = 2y \rightarrow \frac{df}{dy}(3,1) = 2 \times 1 = 2$

2º Passo: Calcular $f(a+h, b+k)$ e $f(a,b)$

$f(3+h, 1+k) = (3+h)^2 + (1+k)^2$

$= 9 + 6h + h^2 + 1 + 2k + k^2$

$= 10 + 6h + h^2 + 2k + k^2$

$f(3,1) = 3^2 + 1^2 = 10$

3º Passo: Verificar se o limite dá zero

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(3+h, 1+k) - \frac{df}{dx}(3,1) \cdot h - \frac{df}{dy}(3,1) \cdot k}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{10 + 6h + h^2 + 2k + k^2 - 10 - 6h - 2k}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{h^2 + k^2}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \sqrt{h^2 + k^2} = 0$$

↳ Nota: $\frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$

Conclusão: f é diferenciável em $(3,1)$

b) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ em $(0,0)$

1º Passo:

Nota: $\frac{df}{dx} = (\sqrt{x^2 + y^2})'_x = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}}$

Não se pode calcular as derivadas parciais de f em $(0,0)$ pelas regras

Calcular $\frac{df}{dx}(0,0)$ por definição

$$\frac{df}{dx}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h^2} - 0}{h} \rightarrow \frac{(|h|)^2 = h}{\sqrt{h^2} = |h|}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} \xrightarrow{h > 0} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

$$\xrightarrow{h < 0} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

Diferentes, logo não existe limite

↳ Não existe $\frac{df}{dx}(0,0)$

c) $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$ em $(0,0)$

1º Passo: (Temos de derivar por definição)

$$\frac{df}{dx}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0,0)}{h}$$

messmo o!!! h

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

$\frac{df}{dy}(0,0) = \dots = 0$

Seja $A = \{(h,k) \in \mathbb{R}^2 : k=h, h>0\}$
 $(0,0)$ é ponto de acumulação de A

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{df}{dx}(h,k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{2h^2}}}{\sqrt{2h^2}} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{2}h} = +\infty \neq 0$$

Conclusão: f não é diferenciável em $(0,0)$

2º Passo: $f(0+h, 0+k) = \sqrt[3]{hk}$

$f(0,0) = 0$

3º Passo:

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt[3]{hk} - 0 - 0 \cdot h - 0 \cdot k}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt[3]{hk}}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

$$5) f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Pelo ex. 7 da aula 12 temos que f não é contínua em $(0,0)$, logo, pelo Teo. do slide 44, f não é diferenciável em $(0,0)$

$$6) f(x,y) = x^2 + y^2 \text{ em } (3,1)$$

$$D_f = \mathbb{R}^2$$

$$\frac{df}{dx} = 2x$$

$$\frac{df}{dy} = 2y$$

As derivadas parciais são contínuas em \mathbb{R}^2

Logo, pelo Teo. slide 45, f é diferenciável em $(3,1)$

$$7) f(x,y) = e^x \cos y + \frac{y^2}{2} + 1$$

$$D_f = \mathbb{R}^2$$

$$a) \frac{df}{dx} = (e^x \cos y + \frac{y^2}{2} + 1)'_x = e^x \cos y$$

São contínuas em \mathbb{R}^2 , logo pelo Teo. slide 45, f é diferenciável em \mathbb{R}^2

$$\frac{df}{dy} = (e^x \cos y + \frac{y^2}{2} + 1)'_y = -\sin y e^x + y$$

$$b) p = (1,0)$$

$$\vec{u} = (1,2)$$

$$D_{\vec{u}} f(1,0) = ?$$

como f é diferenciável podemos usar o Teo. slide 45

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \xrightarrow{\|\vec{u}\| \neq 1} \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\cdot \frac{df}{dx}(1,0) = e^1 \cos 0 = e$$

$$\frac{df}{dy}(1,0) = -e^1 \sin 0 + 0 = 0$$

$$\nabla f(1,0) = (e, 0)$$

$$\text{Então: } D_{\vec{u}} f(1,0) = \nabla f(1,0) \cdot \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = (e, 0) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{e}{\sqrt{5}}$$

c) Valor máximo de $D_{\vec{u}} f(0,\pi) = ? \rightarrow$ É obtido quando $\vec{u} = \nabla f(0,\pi)$
 $= (e^0 \cos \pi; -e^0 \sin \pi + \pi)$
 $= (-1, \pi)$

O valor máximo é $\|\nabla f(0,\pi)\|$

$$= \sqrt{(-1)^2 + \pi^2} = \sqrt{1 + \pi^2}$$

$$8) F(x,y,z) = 2xz^4 + x^2y$$

Eq. plano tangente e de reta normal à superfície de nível

$$F(x,y,z) = 3 \text{ no ponto } (-1; 2; 1)$$

$$\nabla F(-1; 2; 1) = (-2; 1; -8)$$

$$\frac{dF}{dx} = 2z^4 + 2xy \rightarrow \frac{dF}{dx}(-1; 2; 1) = -2$$

$$\frac{dF}{dy} = x^2 \rightarrow \frac{dF}{dy}(-1; 2; 1) = 1$$

$$\frac{dF}{dz} = 8xz^3 \rightarrow \frac{dF}{dz}(-1; 2; 1) = -8$$

Eq. plano tangente: $\frac{dF}{dx}(-1; 2; 1) \cdot (x - (-1)) + \frac{dF}{dy}(-1; 2; 1) \cdot (y - 2) + \frac{dF}{dz}(-1; 2; 1) \cdot (z - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \text{T.P.C.} \Leftrightarrow -2x + y - 8z + 4 = 0$$

Eq. reta normal: $(x,y,z) = (-1; 2; 1) + \lambda(-2; 1; -8), \lambda \in \mathbb{R}$